

Der spezifische elektrische Widerstand poröser Materialien

Theoretische Grundlagen für die Ermittlung der Materialfeuchte durch geoelektrische Messungen

Prof. Dr. Gerald Peschel

1. Bestandteile poröser Stoffe	1
2. Porosität und Sättigungsgrad	2
3. Materialfeuchte	3
4. Experimentelle Ermittlung von Porosität, Wassersättigungsgrad und Feuchte an Materialproben	3
5. Spezifischer elektrischer Widerstand	4
6. Widerstand und Leitfähigkeit	5
7. Messung des spezifischen elektrischen Widerstandes von Materialproben.	5
8. Messung des spezifischen elektrischen Widerstandes an Materialoberflächen	6
9. Spezielle Elektrodenkonfigurationen	7
9.1. Wenner- Anordnung	7
9.2. Schlumberger- Anordnung	8
9.3. Pol-Dipol- Anordnung	9
9.4. VRP-Anordnung	9
10. Abhängigkeit des spezifischen elektrischen Widerstandes von der Feuchte und vom spezifischen elektrischen Widerstand der Porenflüssigkeit	10
11. Abhängigkeit des spezifischen elektrischen Widerstandes vom Salzgehalt der Porenflüssigkeit	12
12. Abhängigkeit des spezifischen elektrischen Widerstandes von der Feuchte und vom Salzgehalt der Porenflüssigkeit	13
13. Abhängigkeit des spezifischen elektrischen Widerstandes der Porenflüssigkeit von der Temperatur	14
14. Wahrer und scheinbarer spezifischer elektrischer Widerstand	14
15. Ermittlung des Exponenten m und der Salzkonzentration der Porenflüssigkeit des porösen Materials	16
15.1 Zweipunktkalibrierung	16
15.2 Statistische Kalibrierung	17
16. Berechnung der Feuchte aus dem spezifischen elektrischen Widerstand	18
17. Präzisierung der Berechnung der Materialfeuchte nach Kalibrierung durch Labormessungen	19

Geschäftssitz:
Hauptstraße 27,
17498 Weitenhagen,

Handelsregister:
B 1684 Amtsgericht
Stralsund,

Geschäftsführer:
Dr. Hermann Lubenow,

Einzelprokura:
Prof. Dr. Gerald Peschel,

Steuernummer:
084/106/02416,
Umsatzsteuer-
Identnummer:
DE 13 75 80 226,

Bankverbindung:
Volksbank
Raiffeisenbank eG
Greifswald,
BIC: GENODE1ANK
IBAN: DE1415061638
0001038460

1. Bestandteile poröser Stoffe

Poröse Materialien sind Mehrphasensysteme. Sie bestehen aus einem Feststoffgerüst, in dem Hohlräume enthalten sind. Die Hohlräume sind mit flüssigen und bzw. oder gasförmigen Stoffen gefüllt.

Derartige Materialien spielen in Natur und Technik eine große Rolle. Als geologische Speichermedien können Gesteine z.B. Trinkwasser oder Erdöl bzw. Erdgas enthalten. Böden stellen die für das Pflanzenwachstum erforderliche Nährstofflösung zur Verfügung. Die in Baustoffen vorhandenen Hohlräume bestimmen maßgeblich deren Wärmedämmung und Feuchtigkeitstransport.

Die Hohlräume bilden sich bereits bei der Entstehung bzw. Herstellung der Materialien und verändern sich danach oft noch beträchtlich unter dem Einfluß innerer und äußerer Kräfte. Bei Sedimentgesteinen, Böden und lockeren mineralischen Bau-

stoffen treten sie meist in Form von Poren zwischen körnerförmigen Feststoffpartikeln auf. Bei festen Baustoffen entstehen Poren hauptsächlich infolge des Volumenverlustes beim Brennen bzw. Aushärten. Poren sind, in Abhängigkeit von ihrer Anzahl und Größe entweder durch Feststoff voneinander getrennt (isolierte Poren) oder als kommunizierende Poren netzförmig miteinander verbunden (Abbildung 1).

Neben den mehr oder weniger isometrischen Poren treten nicht selten auch Hohlräume mit flächenhafter Ausdehnung in Form von Klüften bzw. Rissen auf (Abbildung 1). Bei größerem Volumenanteil müssen sie bei der Beurteilung der Materialeigenschaften berücksichtigt werden. Bei geringer Breite (Mikroklüfte, Mikrorisse) ist es üblich, sie bei der quantitativen Behandlung der physikalischen Größen, ebenfalls als "Poren" einzubeziehen.

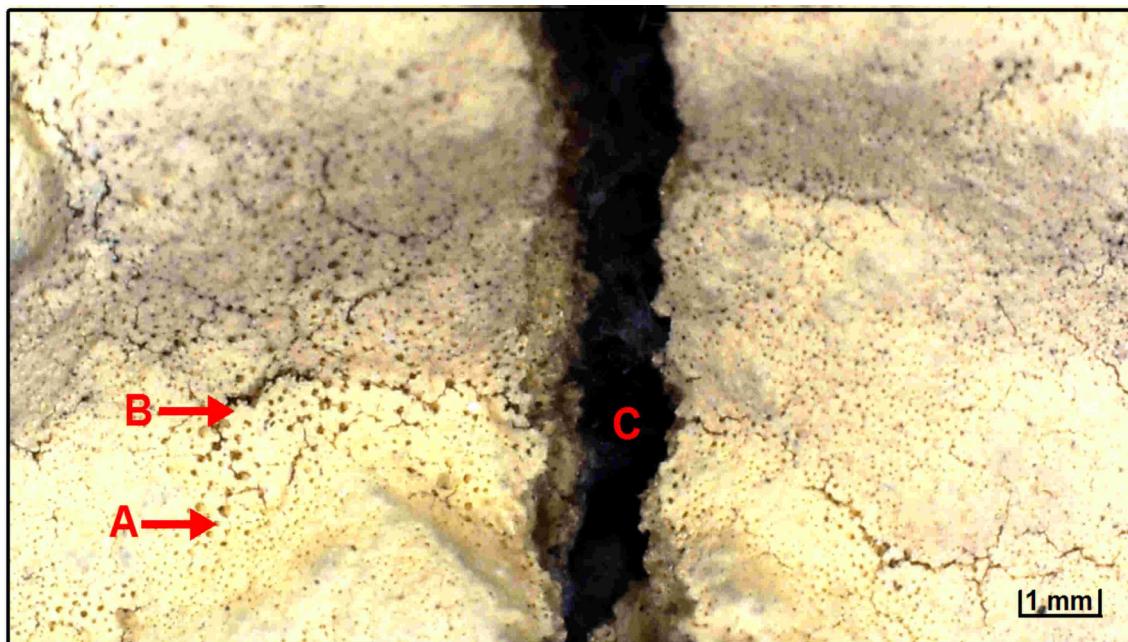


Abbildung 1: Isolierte Poren (A), kommunizierende Poren (B) und Riß (C) in einer Kalkputzoberfläche.

2. Porosität und Sättigungsgrad

Für viele praktische Aufgabenstellungen, bei hat sich ein vereinfachtes Stoffmodell bewährt, bei dem deren Volumina ohne Berücksichtigung ihrer komplizierten Form und Verteilung im Raum zusammengefasst werden (Abbildung 2).

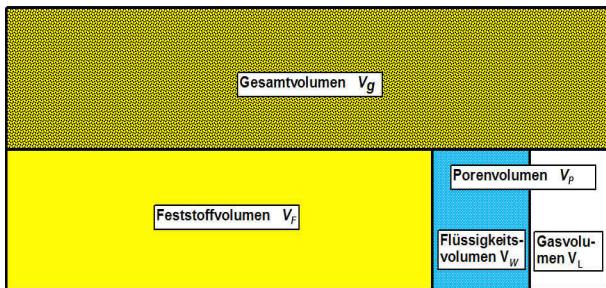


Abbildung 2: Vereinfachtes Stoffmodell

Diese Vereinfachung gründet sich auf zwei Annahmen:

- 1.) Die Phasen sind physikalisch homogen und isotrop.
- 2.) Die physikalischen Wechselwirkungen zwischen den Phasen können vernachlässigt werden.

Wenn diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind, müssen zusätzliche Kennziffern eingeführt werden, um die betreffenden Effekte zu erfassen.

Die quantitative Beschreibung des Anteils der Hohlräume in einem porösen Material erfolgt dann durch die Porosität¹ p als Volumenverhältnis, nämlich als Quotient des summarischen Volumens aller Poren V_p und dem Gesamtvolumen V_g des betrachteten Materialstücks.

$$p = \frac{V_p}{V_g} \quad (1)$$

p kann als Verhältniszahl ($0 \leq p \leq 1$) oder nach Multiplikation mit dem Faktor 100 in Prozent angegeben werden.

Je nachdem, ob V_p nur das Volumen der kommunizierenden Poren oder das aller in der Festsubstanz enthaltenen Poren dar-

stellt, unterscheidet man die Nutzporosität p_n von der Gesamtporosität p_g . Die Nutzporosität beschreibt den Anteil der Hohlräume, der für die Speicherung und den Transport von flüssigen bzw. gasförmigen Stoffen zur Verfügung steht. Die Gesamtporosität ist z.B. bei Baustoffen für die Wärmedämmung maßgeblich.

Die ebenfalls häufig verwendete Kennziffer Porenzahl bzw. Porenziffer e , die als Quotient aus dem Volumen der Poren V_p und dem Volumen der Festsubstanz V_f für ein bestimmtes Gesamtvolumen definiert ist, und für die $e = p / (1-p)$ gilt, beschreibt die Zusammensetzung des Mehrphasensystems weniger anschaulich.

Der Anteil des Porenvolumens, der jeweils von der flüssigen Phase und von der gasförmigen Phase eingenommen wird, ist der Sättigungsgrad S .

Weil - mit Ausnahme von Kohlenwasserstofflagerstätten - die flüssige Phase meist aus Wasser und die Gasphase aus Luft besteht, werden die betreffenden Verhältniszahlen vereinfachend als Wassersättigungsgrad bzw. Wassersättigung

$$S_w = \frac{V_w}{V_p} \quad (2)$$

und als Luft- oder Gassättigungsgrad bzw. Luft- oder Gassättigung

$$S_L = \frac{V_L}{V_p} \quad (3)$$

bezeichnet. Es gilt $S_w + S_L = 1$.

S kann als Verhältniszahl ($0 \leq S \leq 1$) oder nach Multiplikation mit dem Faktor 100 in Prozent angegeben werden.

Bei $S_w = 1$ bzw. 100 % ist das betreffende Material "wassergesättigt", bei $S_w = 0$ bzw. 0 % "trocken". Wenn der Wert von S_w zwischen 0 und 1 liegt, ist das betreffende Material mit Wasser "teilgesättigt" oder "feucht".

1 Häufig auch als "Porenanteil" bezeichnet.

3. Materialfeuchte

Für viele praktische Aufgaben ist es üblich und sinnvoll, direkt das Verhältnis des im Material vorhandenen Wasservolumens zum Gesamtvolumen zu betrachten. Der betreffende Quotient

$$F = \frac{V_w}{V_g} \quad (4)$$

wird als Materialfeuchte bzw. kurz Feuchte bezeichnet.²

Die Materialkennziffern "Feuchte" und "Sättigungsgrad" spiegeln das Verhältnis von flüssiger und fester Phase in einem porösen Stoff in unterschiedlicher Weise wider. Im Gegensatz zur Feuchte berücksichtigt der Sättigungsgrad die Tatsache, daß die Aufnahmefähigkeit von Gesteinen, Böden, Baumaterialien usw. für Wasser oder andere Flüssigkeiten von ihrer Porosität abhängt. So hat z. B. ein "fast trockener", poröser Sandstein ($p = 0.4$, $S = 0.1$) die gleiche Feuchte wie ein wasser gesättigter Granit ($p = 0.04$, $S = 1$). Der Kennzahl Feuchte (in diesem Falle für beide Gesteine $F = 0.04$) kann man demnach ohne zusätzliche Information nicht ansehen, ob das Material in Bezug auf seine spezifische Wasseraufnahmefähigkeit "trocken" oder "feucht" ist.

Beide Kennziffern sind durch die Beziehung

$$F = p \cdot S \quad (5)$$

miteinander verknüpft.³

4. Experimentelle Ermittlung von Porosität, Wassersättigungsgrad und Feuchte an Materialproben

Die Ermittlung dieser Kennziffern erfolgt

2 Die, im Bauwesen übliche massenbezogene Definition der Feuchte führt zu Kennziffern, die für verschiedene Materialien nicht miteinander verglichen werden können. Bei Bezug auf die Trockenmasse weisen Stoffe mit unterschiedlicher Feststoffdichte und gleichem Wassergehalt verschiedene Feuchtwerte auf, bei Bezug auf die Gesamtmasse sind sogar Materialien mit gleicher Trockendichte aber unterschiedlicher Sättigung nicht vergleichbar.

3 Gilt nur für die Verhältniszahlen, nicht für Prozentangaben.

unter Laborbedingungen an zylinderförmigen (Bohrkerne, Ausstechproben) oder quaderförmigen Proben, deren Gesamtvolumen V_g aus den Probemaßen leicht errechnet werden kann.

Falls die Feuchte und der Wassersättigungsgrad im natürlichen Zustand zum Zeitpunkt der Probeentnahme aus dem Materialverband interessiert, muß die Probemasse unmittelbar nach der Probeentnahme bestimmt werden. Alle Kennziffern in diesem Zustand erhalten den Index n , d.h. der betreffende Meßwert erhält die Bezeichnung M_n .

Danach wird die Probe vollständig mit destilliertem Wasser oder mit einer Salzlösung definierter Konzentration gesättigt. Das gelingt nicht durch einfaches Befeuchten oder Eintauchen der Probe, weil der Druck des von verschiedenen Seiten in die Poren eindringenden Wassers zahlreiche Luftblasen fixiert. Zur vollständigen Sättigung muß die Probe in einem Exsikkator in die Sättigungsflüssigkeit eingetaucht werden und dann die Luft mit einer Vakuumpumpe aus dem Exsikkator abgepumpt werden. Die Probe muß so lange dem Unterdruck ausgesetzt bleiben, bis keine Luftblasen mehr Probe entweichen. Das kann u.U. mehrere Stunden dauern.

Danach wird die Masse der Probe im vollständig gesättigten Zustand ermittelt. Alle Kennziffern in diesem Zustand erhalten den Index s , d.h. der betreffende Meßwert erhält die Bezeichnung M_s .

Falls die Probe mit einer Salzlösung gesättigt wurde, muß anschließend noch deren Dichte δ_w bestimmt werden.

Als nächstes wird die Probe so lange getrocknet, bis die Porenflüssigkeit vollständig verdampft ist, d.h. die Poren nur noch Luft enthalten. Dieser Zustand ist mit Hilfe einer Präzisionswaage daran erkennbar, daß sich die Probemasse nicht mehr verringert.

Der Trocknungsvorgang ist bei normaler

Umgebungstemperatur recht langwierig und dauert oft mehrere Tage. Er kann zwar mit Hilfe eines Heißluftventilators oder Infrarotstrahlers verkürzt werden, die Entfernung des in den kleinsten Kapillaren adhäsiv gebundenen Wassers gelingt schließlich aber nur im Trockenschrank bei 105 °C.

Danach erfolgt die Bestimmung der Probemasse im völlig ausgetrockneten Zustand. Alle Kennziffern in diesem Zustand erhalten den Index t , d.h. der betreffende Meßwert erhält die Bezeichnung M_t .

Nach Abschluß der Messungen berechnet man das Porenvolumen mit

$$V_p = (M_s - M_t) \cdot \delta_w \quad (6),$$

und das Volumen der Wassermenge, die zum Zeitpunkt der Probeentnahme in den Poren vorhanden war, mit

$$V_w = V_n = (M_n - M_t) \cdot \delta_w \quad (7).$$

Für Salzkonzentrationen bis ca. 5 g/l kann δ_w vernachlässigt werden, weil der Fehler bei der Volumenberechnung kleiner als 3 % ist.

Mit diesen Werten wird abschließend die Porosität p mit (1), der Wassersättigungsgrad im natürlichen Zustand, unmittelbar nach der Probeentnahme $S_{w,n}$ mit (2) und die Feuchte F_n in diesem Zustand mit (4) berechnet.

Mit (5) kann eine Plausibilitätskontrolle der ermittelten Zahlenwerte erfolgen.

5. Spezifischer elektrischer Widerstand

Wenn ein elektrischer Strom durch ein bestimmtes Material fließt, dann behindern die Materialeigenschaften in unterschiedlicher Weise den Stromfluß. Diese Tatsache bewirkt, daß eine bestimmte elektrische Spannung in unterschiedlichen Materialien unterschiedlich große Stromstärken verursacht. Demnach ist das Verhältnis von Spannung U und Stromstärke I ein

Maß dieser Behinderung und deshalb wird es als elektrischer Widerstand R bezeichnet.

$$R = \frac{U}{I} \quad (8)$$

Die Maßeinheit des elektrischen Widerstandes (1 Volt / 1 Ampere) ist 1 Ohm (Ω).

Der Widerstand den eine Probe definierter Form (Zylinder, Quader) dem Stromfluß entgegenseetzt ist proportional zu deren Länge λ , umgekehrt proportional zu ihrer Querschnittsfläche A und wird außerdem durch eine Materialkennziffer bestimmt, die als spezifischer elektrischer Widerstand ρ bezeichnet wird.

$$R = \frac{\lambda}{A} \cdot \rho \quad (9).$$

Wenn Gleichung (9) nach ρ aufgelöst wird ergibt sich für $\lambda = 1 \text{ m}$, $A = 1 \text{ m}^2$ und $R = 1 \Omega$ als Maßeinheit des spezifischen elektrischen Widerstandes $1 \Omega \text{m}$ (Ohmmeter).

Bei den Mehrphasensystemen, die hier betrachtet werden, unterscheiden sich die spezifischen elektrischen Widerstände der einzelnen Phasen um mehrere Größenordnungen. Während die Werte für die festen und die gasförmigen Substanzen größer als $10^{10} \Omega \text{m}$ sind, liegen sie für die flüssige Phase - mit Ausnahme von Erdöl - im Bereich zwischen $0.5 \Omega \text{m}$ (Meerwasser) bis $100 \Omega \text{m}$ (salzarme Grund- und Gebirgswässer). Der spezifische elektrische Widerstand von reinem Wasser (Regenwasser) ist mit ca. $10^5 \Omega \text{m}$ zwar ebenfalls sehr hoch. Beim Eindringen in Böden, Gesteine, Baumaterialien löst es jedoch Salze, worauf sich die Werte in den o.a. Bereich erniedrigen.

Letztlich wird der spezifische elektrische Widerstand eines porösen Materials fast ausschließlich von der Menge der in seinen Poren enthaltenen leitfähigen Flüssigkeit bestimmt und damit von seiner Porosität und vom Sättigungsgrad. So berechnet sich z.B. der Ersatzwiderstand einer Parallelschaltung der drei Phasen

mit $\rho_{fest} = 10^{10} \Omega\text{m}$, $\rho_{flüssig} = 20 \Omega\text{m}$ und $\rho_{gas} = 10^{30} \Omega\text{m}$ bei $p = 0.3$ und $S = 0.5$ zu etwa $130 \Omega\text{m}$. Bei einem Sättigungsgrad von $S = 0.3$, steigt der spezifische elektrische Widerstand bereits auf $220 \Omega\text{m}$ und bei einer weiteren Verminderung des Sättigungsgrades auf $S = 0.1$ sogar auf $670 \Omega\text{m}$.

Weil derartige Meßeffekte physikalisch gut erfassbar sind und außerdem der spezifische elektrische Widerstand auch zerstörungsfrei, d.h. ohne Probenentnahme an der Erdoberfläche bzw. an der Oberfläche von Bauteilen ermittelt werden kann, eignet sich seine Messung nach entsprechender Kalibrierung gut für die Bestimmung der Materialfeuchte als Produkt von Porosität und Sättigungsgrad.

6. Widerstand und Leitfähigkeit

Das elektrische Verhalten von Flüssigkeiten wird im Bereich technischer Anwendungen meist nicht durch den Widerstand sondern durch den Leitwert G charakterisiert, der als dessen Kehrwert definiert ist und dessen Einheit S als "Siemens" bezeichnet wird.⁴ Dem entsprechend gilt für die spezifische Leitfähigkeit σ einer Flüssigkeit

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (11)$$

Die übliche Arbeitseinheit ist $\mu\text{S}\cdot\text{cm}^{-1}$. Die Umrechnung kann mit

$$\rho [\Omega\text{m}] = 1/\sigma \cdot 10^4 [\mu\text{S}\cdot\text{cm}^{-1}] \quad (12)$$

erfolgen.

7. Messung des spezifischen elektrischen Widerstandes von Materialproben.

Die Messung des spezifischen elektrischen Widerstandes von zylinder- oder quaderförmigen Materialproben erfolgt auf der Grundlage der Gleichung

⁴ Weil die Formelzeichen und Abkürzungen der Einheiten in verschiedenen Wissensgebieten unabhängig voneinander festgelegt wurden, sind Doppelbezeichnungen (hier konkurrierend mit dem Sättigungsgrad) nicht zu vermeiden und die jeweilige Bedeutung ist nur im Kontext eindeutig.

$$\rho = \frac{U \cdot A}{I \cdot \lambda} \quad (13)$$

die aus (8) und (9) folgt.

Die Proben müssen so vorbereitet werden, daß die Meßflächen glatt, eben und möglichst parallel sind, damit in der Probe ein homogenes Stromdichtefeld entstehen kann.

Nach dem Ausmessen der geometrischen Parameter A und λ werden zwei Metallektroden an gegenüberliegende, Flächen der Materialprobe gepresst, die mit Zuleitungskabeln verbunden sind (Abbildung 3). Bei sehr trockenen Proben sollten die Elektroden vorher mit einer dünnen Schicht Leitgel bestrichen werden.

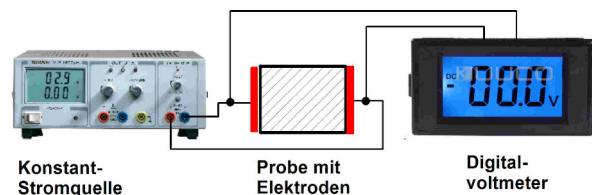


Abbildung 3: Meßanordnung zur Bestimmung des spezifischen elektrischen Widerstandes von Materialproben.

Die Elektroden werden mit einer Konstantstromquelle verbunden, die einen niederfrequenten, sinusförmigen Wechselstrom mit der einstellbaren Stromstärke I durch die Probe schickt. Die Frequenz sollte so gewählt werden, das ausreichender Abstand zu anderen technischen Einrichtungen besteht (z.B. 33 Hz). Die über der Probe abfallende, d.h. zwischen den Elektroden entstehende Spannung U wird mit einem Digitalvoltmeter gemessen.

Zur Erhöhung der Genauigkeit sollten stets mehrere Messungen durchgeführt werden (ca. 10), aus denen der Mittelwert gebildet wird. Zwischen den Einzelmessungen sollten die Elektroden entfernt und neu angebracht werden, um den Einfluß unvollständiger Kontaktflächen zu vermindern.

8. Messung des spezifischen elektrischen Widerstandes an Materialoberflächen.

Die Entnahme und Vorbereitung von Materialproben ist mit großem Aufwand verbunden und ergibt meist keine repräsentativen Werte, weil damit die natürlichen, oft zufälligen Variationen innerhalb der Untersuchungsobjekte infolge der geringen Probengröße nicht erfaßt werden können. Außerdem sind sie mit einer - zumindest partiellen - Zerstörung bzw. Beschädigung des Untersuchungsgegenstandes verbunden, die häufig nicht zulässig ist.

Messungen an der Oberfläche sind frei von diesen Nachteilen und können, falls erforderlich, das gesamte Untersuchungsobjekt umfassen und so Informationen über dessen innere Struktur auf der Grundlage der räumlichen Variation des spezifischen elektrischen Widerstandes liefern.

Anders als bei den oben beschriebenen Messungen an Proben fließt der elektrische Strom bei Einleitung an der Oberfläche nicht in Form von parallelen Stromfäden durch das Material, sondern breitet sich als Stromdichtefeld räumlich in alle Richtungen aus (rote Pfeile in Abbildung 4). Infolge der räumlichen Verteilung der eingeleiteten Stromstärke I , die bei zunehmender Entfernung r vom Quellpunkt durch immer größer werdende Halbkugeloberflächen F fließt, vermindert sich die Stromdichte j im Raum nach der Beziehung

$$j = \frac{I}{F} = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r^2} \quad (14)$$

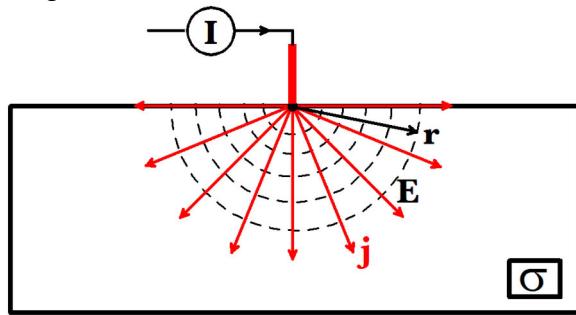


Abbildung 4: Stromdichtefeld j und elektrisches Potentialfeld E bei der Einleitung eines elektrischen Stroms mit der Stromstärke I an der Oberfläche eines porösen Materials mit der Leitfähigkeit σ .

Das Stromdichtefeld erzeugt nach dem Ohmschen Gesetz in seiner allgemeinen Form

$$j = \sigma \cdot E \quad (15)$$

ein elektrisches Feld E (gestrichelte schwarze Linien in Abbildung 4), dessen Feldlinien als Orthogonaltrajektorien senkrecht zu den Stromlinien verlaufen.

Für das elektrische Potential $\Phi(r)$ im Abstand r vom Quellpunkt innerhalb und an der Oberfläche eines porösen Stoffes mit dem spezifischen elektrischen Widerstand ρ folgt aus den Gleichungen (11), (14) und (15) nach Integration

$$\Phi(r) = \frac{I \cdot \rho}{2 \cdot \pi \cdot r} \quad (16)$$

Weil die, zwischen zwei Raumpunkten vorhandene Potentialdifferenz als elektrische Spannung U gemessen werden kann, gilt

$$U = \frac{I \cdot \rho}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (17)$$

und nach Umstellung für den spezifischen elektrischen Widerstand

$$\rho = \frac{2 \cdot \pi \cdot U}{I \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \quad (18)$$

Die Messung des spezifischen elektrischen Widerstandes poröser Materialien an deren Oberfläche kann demnach durch Messung der Stromstärke I des eingeleiteten elektrischen Stroms und der Spann-

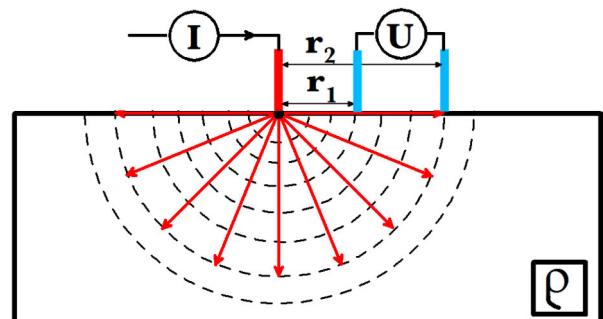


Abbildung 5: Schematische Meßanordnung zur Ermittlung des spezifischen elektrischen Widerstandes poröser Materialien an deren Oberfläche mit drei Stabelektroden.

nung U zwischen zwei Meßpunkten mit definierter Entfernung zum Quellpunkt erfolgen. In der meßtechnischen Praxis werden dazu Stabelektroden an die betreffende Oberfläche angebracht (Abbildung 5). Die, für die Rückführung des elektrischen Stroms erforderliche vierte Elektrode kann in größerer Entfernung ($r_1, r_2, << r_3, r_4$) vom Quellpunkt aufgestellt werden (in Abbildung 5 nicht dargestellt).

9. Spezielle Elektrodenkonfigurationen

Für geoelektrische Messungen an der Geländeoberfläche haben sich bestimmte Konfigurationen der Anordnung und der gegenseitigen Abstände zwischen den Elektroden als günstig erwiesen, von denen die wichtigsten im Folgenden betrachtet werden. Als gemeinsame Eigenschaft haben sie die Aufstellung der Stabelektroden in einer geraden Linie.

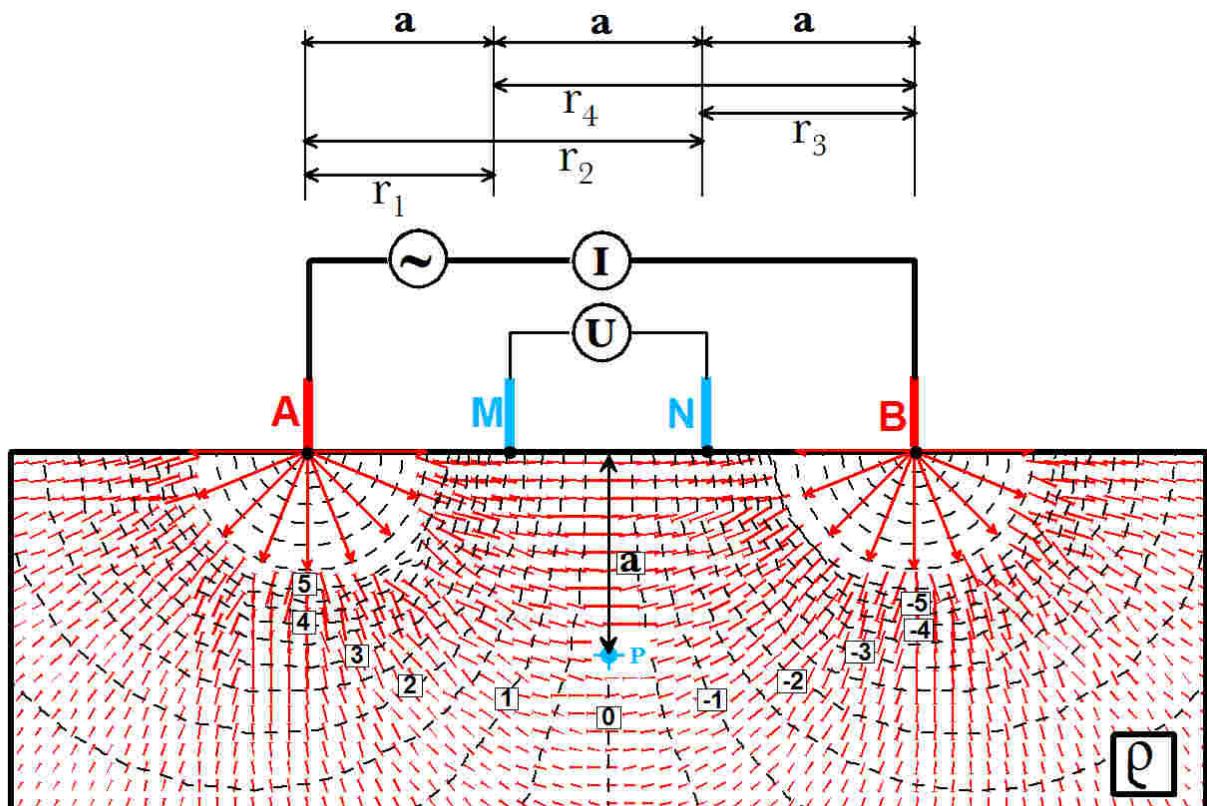


Abbildung 6: Messung des spezifischen elektrischen Widerstandes eines porösen Stoffes mit der Elektrodenkonfiguration nach WENNER. Im Innern des Materials sind die, für $I = 1 \text{ A}$ und $\rho = 100 \Omega\text{m}$ berechneten elektrischen Äquipotentiallinien (schwarz, gestrichelt) und das Feld der Stromdichtevektoren (rot) dargestellt.

9.1. Wenner- Anordnung

Bei der symmetrischen Elektrodenanordnung nach WENNER⁵ werden vier Elektroden im gleichen, gegenseitigen Abstand a verwendet (Abbildung 6). Die beiden äußeren sind die Speiseelektroden **A** und **B**, mit denen der elektrische Strom der Stär-

ke **I** in den Boden eingeleitet wird. Die beiden inneren sind die Meßsonden **M** und **N**, mit denen die dazwischen vorhandene Potentialdifferenz als elektrische Spannung **U** gemessen wird.

Entsprechend Gleichung (16) ist das an der Meßsonde **M** von der Speiseelektrode **A** (Stromquelle) erzeugte Potential

⁵ Wenner, F., "A Method of Measuring Earth Resistivity" Report No. 258, Bulletin of Bureau of Standards, Vol. 12, No. 3, October 11, 1915.

$$\Phi(M | A) = \frac{l \cdot \rho}{2 \cdot \Pi} \cdot \left(\frac{1}{r_1}\right) = \frac{l \cdot \rho}{2 \cdot \Pi} \cdot \left(\frac{1}{a}\right) \quad (19a)$$

Das an der Meßsonde **M** von der Elektrode **B** erzeugte Potential ist

$$\Phi(M | B) = \frac{l \cdot \rho}{2 \cdot \Pi} \cdot \left(\frac{1}{r_2}\right) = \frac{l \cdot \rho}{2 \cdot \Pi} \cdot \left(\frac{-1}{2 \cdot a}\right) \quad (19b)$$

Es bekommt negatives Vorzeichen, weil der elektrische Strom an der Elektrode **B** aus dem Untersuchungsobjekt wieder herausfließt (Stromsenke).

Insgesamt befindet sich dann die Meßsonde **M** auf dem Potential

$$\begin{aligned} \Phi(M) &= \Phi(M | A) + \Phi(M | B) \\ &= \frac{l \cdot \rho}{2 \cdot \Pi} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2 \cdot a}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

Dem entsprechend befindet sich die Sonde **N** auf dem Potential

$$\begin{aligned} \Phi(N) &= \Phi(N | A) + \Phi(N | B) \\ &= \frac{l \cdot \rho}{2 \cdot \Pi} \cdot \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{2 \cdot a}\right) \end{aligned}$$

und für die Spannung **U** gilt

$$\begin{aligned} U &= \Phi(M) - \Phi(N) \\ U &= \frac{l \cdot \rho}{2 \cdot \Pi} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2 \cdot a} + \frac{1}{a} - \frac{1}{2 \cdot a}\right) \\ U &= \frac{l \cdot \rho}{2 \cdot \Pi} \cdot \left(\frac{2}{a}\right) \end{aligned} \quad (22)$$

Durch Umstellung ergibt sich schließlich der spezifische elektrische Widerstand nach der einfachen Gleichung

$$\rho = 2 \cdot \Pi \cdot a \cdot \frac{U}{I} \quad (23)$$

Wenn der Elektrodenabstand **a** in m, die Spannung in V und die Stromstärke in A eingesetzt werden, erhält man **ρ** in Ωm.

Der Referenzpunkt **P**, dem der betreffende Zahlenwert von **ρ** lagemäßig zugeordnet wird, befindet sich unter dem Mittelpunkt der Elektrodenanordnung in der Tiefe **a**, die dem Elektrodenabstand entspricht und auch als Wirkungstiefe bezeichnet wird. (Abbildung 6). Mit der Wenneranordnung wird der betreffende Untersuchungsbereich auf Profillinien oder flächenhaft mit

mehreren, parallel verlaufenden Profillinien untersucht, wobei die Wirkungstiefe, d.h. der Elektrodenabstand konstant bleibt. Diese Untersuchungsmethodik wird als Widerstandskartierung bezeichnet.

9.2. Schlumberger- Anordnung

Die ebenfalls symmetrische Elektrodenanordnung nach Schlumberger⁶ besitzt keine gleichmäßigen Elektrodenabstände, sondern der Abstand **L** zwischen den Speiseelektroden **A** und **B** ist erheblich größer als der Abstand **a** zwischen den Span-

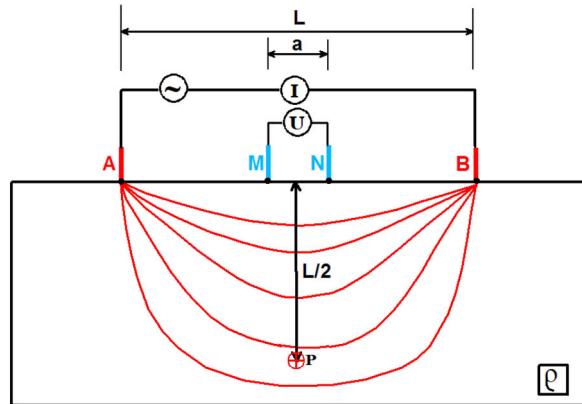


Abbildung 7: Messung des spezifischen elektrischen Widerstandes eines porösen Stoffes mit der Elektrodenkonfiguration nach Schlumberger.

nungsmesssonden **M** und **N** (Abb. 7).

Für den spezifischen elektrischen Widerstand erhält man hier nach einer ähnlichen Rechenoperation

$$\rho = \frac{\Pi \cdot (L^2 - a^2)}{4 \cdot a} \cdot \frac{U}{I} \quad (24)$$

Der Referenzpunkt **P**, dem der betreffende Zahlenwert von **ρ** lagemäßig zugeordnet wird, befindet sich unter dem Mittelpunkt der Elektrodenanordnung in der Wirkungstiefe **L/2**. Bei Messungen mit der Schlumbergeranordnung vergrößert man den Abstand **L** zwischen den Speiseelektroden **A** und **B** schrittweise, um so den spezifischen elektrischen Widerstand mit zunehmender Wirkungstiefe **L/2** zu untersuchen. Dabei erfolgt die Zunahme von **L** gewöhnlich wegen der nichtlinearen Volu-

⁶ C. Schlumberger: Étude sur la prospection électrique du sous-sol. Paris, 1920.

menvergrößerung des Stromdichtefeldes in logarithmischen Schritten. Der Abstand a zwischen den Spannungsmeßelektroden **M** und **N** wird nur dann vergrößert, wenn die Spannung **U** so gering wird, daß sie nicht mehr sicher meßbar ist. Diese Untersuchungsmethodik wird als Widerstandssondierung bezeichnet.

9.3. Pol-Dipol- Anordnung

Bei der Nutzung der Pol-Dipol-Anordnung (Abbildung 5) geht man davon aus, daß der Einfluß der zweiten Speiseelektrode **B** auf die Spannung zwischen den Sonden **M** und **N** vernachlässigt werden kann, wenn die Abstände r_3 und r_4 (vgl. Abbildung 6) groß sind im Vergleich zu r_1 und r_2 . Für die symmetrische Pol-Dipol-Anordnung (auch als Halb-Wenner-Anordnung bezeichnet), bei der die Abstände zwischen den drei Elektroden gleich sind und den Wert a besitzen, vereinfacht sich Gleichung (18) zu

$$\rho = 4 \cdot \Pi \cdot a \cdot \frac{U}{I} \quad (25)$$

bzw. weiter mit Gleichung (8) zu

$$\rho = 4 \cdot \Pi \cdot a \cdot R \quad (26)$$

Der Referenzpunkt **P**, dem der betreffende Zahlenwert von ρ lagemäßig zugeordnet wird, befindet sich im Mittelpunkt der Elektrodenanordnung, d.h. unter der Elektrode **N** in der Wirkungstiefe $a/2$.

Die Pol-Dipol-Anordnung kann sowohl für die Kartierung als auch für die Sondierung eingesetzt werden. Sie besitzt jedoch den Nachteil, daß Inhomogenitäten des Untersuchungsgegenstandes, d.h. räumliche Variationen des spezifischen elektrischen Widerstandes nicht isomorph sondern verzerrt abgebildet werden.

9.4. VRP-Anordnung

Bei der Methode des Vertikal resistivity

profiling (VRP)⁷ wird die symmetrische Pol-Dipol-Anordnung mit wechselnder Position des Pols, d.h. der Speiseelektrode **A** genutzt (Abbildung 8).

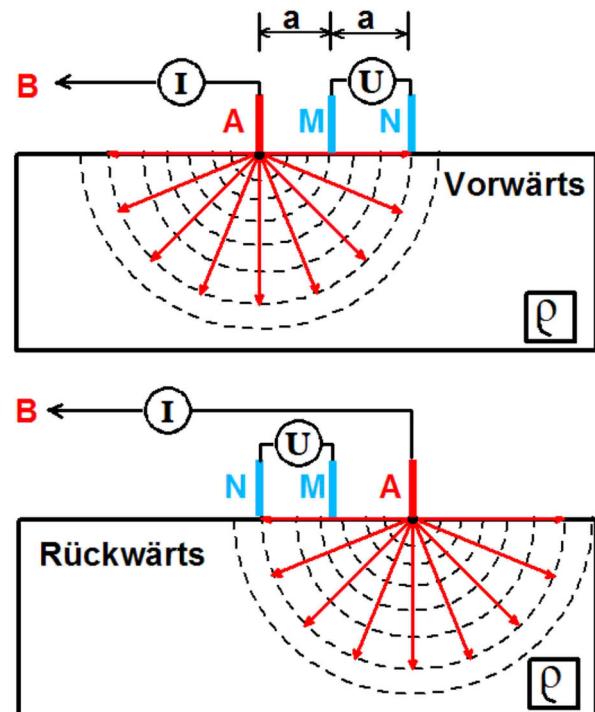


Abbildung 8: Messung des spezifischen elektrischen Widerstandes eines porösen Stoffes mit dem VRP-System.

Die erste Messung (Vorwärts) erfolgt so, daß die Messung der Spannung **U** "vor" der Speiseelektrode **A** durchgeführt wird. Aus **I** und **U** wird nach Gleichung 8 ein "Vorwärtswert" des Widerstandes **RV** bestimmt. Danach erfolgt eine zweite Messung, bei der die Messung der Spannung **U** "hinter" der Speiseelektrode **A** durchgeführt wird. Aus **I** und **U** wird nach Gleichung 8 ein "Rückwärtswert" des Widerstandes **RR** bestimmt. Daraus wird

$$RM = \frac{RV+RR}{2} \quad (27),$$

d.h. der Mittelwert **RM** berechnet und mit Gleichung (26) schließlich der spezifische Widerstand ρ .

Der Referenzpunkt **P**, dem der betreffende Zahlenwert von ρ lagemäßig zugeordnet wird, befindet sich unter dem Mittelpunkt

⁷ Peschel,G.: A new favourable combination of resistivity sounding and profiling in archaeological surveying. *Prospezioni archeologiche*, 2, 23-28, Rom, 1967.

der Elektrodenanordnung, d.h. unter der Meßsonde M in der Wirkungstiefe $a/2$. Zur Veranschaulichung für weitere, kompliziertere Überlegungen ist diese Lagebeziehung in Abbildung 9 graphisch dargestellt.

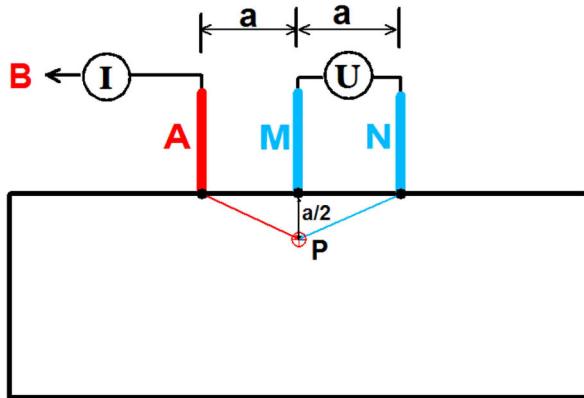


Abbildung 9: Veranschaulichung der Lagebeziehungen zwischen den Elektrodenpositionen und dem Referenzpunkt P, dem der damit gemessene Wert des spezifischen elektrischen Widerstand zugeordnet wird.

Die vollständige Elektrodenanordnung des VRP-Systems besteht aus 12 Elektroden, die alle gleichzeitig mit dem Meßcomputer verbunden sind. Die 12. Elektrode ist die Speiseelektrode B, die im entsprechend großem Abstand ($> 5a$) von den übrigen Elektroden aufgestellt wird. Von diesen, im gleichmäßigen Abstand a, auf einer geraden Linie angeordneten 11 Elektroden wird die Mittlere immer als Spannungsonde M verwendet. Die übrigen 10 werden vom Meßcomputer nacheinander

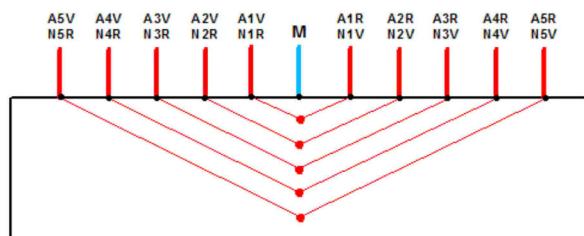


Abbildung 10: Elektrodenanordnung des VRP-Systems.

als Speiseelektrode A und als Spannungsonde N und zwar abwechselnd für die Vorwärts- und die Rückwärtsmessung ausgewählt. Dieses Verfahren ermöglicht die Messung des spezifischen elektrischen Widerstandes an einer bestimmten Stelle des Untersuchungsgegenstandes in

5 verschiedenen Wirkungstiefen, ohne daß dafür die Elektrodenpositionen verändert werden müssen (Abbildung 10).

10. Abhängigkeit des spezifischen elektrischen Widerstandes von der Feuchte und vom spezifischen elektrischen Widerstand der Porenflüssigkeit.

Aus dem in Abbildung 2 dargestellten, vereinfachten Stoffmodell poröser Materialien folgt, daß deren spezifischer elektrischer Widerstand weitgehend vom Anteil der flüssigen Phase am Gesamtvolumen und von deren spezifischen elektrischen Widerstand abhängt. Dieses Modell kann nämlich auch als elektrisches Ersatzschaltbild für die Durchleitung des elektrischen Stroms durch das poröse Medium betrachtet werden, als Parallelschaltung der Widerstände der drei Medien (Abbildung 11).

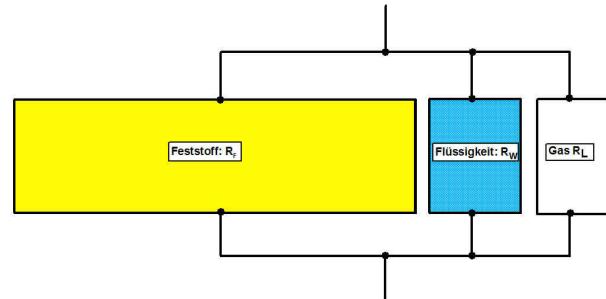


Abbildung 11: Elektrisches Ersatzschaltbild poröser Materialien

Für den Gesamtwiderstand R gilt dann

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_F} + \frac{1}{R_W} + \frac{1}{R_L} \quad (28).$$

Wegen des sehr hohen spezifischen elektrischen Widerstandes der festen Phase ρ_F (z.B. Graphit und Steinsalz: $10^6 \dots 10^7 \Omega\text{m}$, gebrannte Tonerde $10^{11} \Omega\text{m}$, Quarz: $10^{24} \Omega\text{m}$) und des meist noch größeren der gasförmigen Phase, die in den Poren meist als Luft, gelegentlich auch als Methan oder CO_2 vorkommt, sind das erste und das letzte Glied in Gleichung (28) gegenüber $1/R_W$ sehr klein und können vernachlässigt werden, so daß von Gleichung (28) schließlich nur

$$R = R_w \quad (29)$$

übrig bleibt.

Nach Gleichung (4) ergibt sich der Widerstand des betrachteten Materialstücks als

$$R = \frac{\lambda}{A} \cdot \rho \quad (30),$$

worin ρ derjenige spezifische elektrische Widerstand ist, der am Material gemessen wird. Der Widerstand der flüssigen Phase ist

$$R_w = \frac{\lambda}{A_w} \cdot \rho_w \quad (31).$$

Mit (29) erhält man

$$\frac{\lambda}{A} \cdot \rho = \frac{\lambda}{A_w} \cdot \rho_w \quad (32)$$

und nach Division beider Seiten durch λ und den Substitutionen

$$\lambda \cdot A = V_g \text{ und } \lambda \cdot A_w = V_w \quad (33)$$

ergibt sich mit Gleichung (4)

$$\rho = F^{-1} \cdot \rho_w \quad (34)$$

Der spezifische elektrische Widerstand feuchter, poröser Materialien ρ wird demnach hauptsächlich von der Feuchte F und vom spezifischen elektrischen Widerstand ρ_w der in den Poren enthaltenen Flüssigkeit bestimmt.

Diese theoretischen Überlegungen werden durch experimentelle Untersuchungen prinzipiell bestätigt, wobei die vorgenommene Vereinfachung im Einzelfall noch durch eine geringfügige Korrektur des Exponenten von F ergänzt werden muß, so daß die Beziehung (34) die Form

$$\rho = F^{-m} \cdot \rho_w \quad (35)$$

erhält.

Der Exponent m berücksichtigt z.B. die Existenz von Poren unterschiedlicher Größe (Porengrößenverteilung), deren Durchlässigkeit sich für Ionen verschiedener Größe unterscheidet, die Verwindung (Tortuosität) der Leitungsbahnen im Porenraum, die Wechselwirkungen zwischen den Ladungsträgern und den Porenwänden usw. die im Einzelnen theoretisch nicht modelliert werden können.

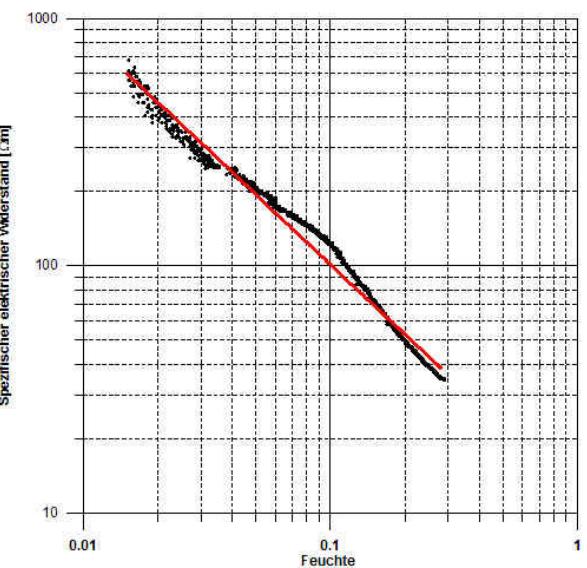


Abbildung 12: Experimentell ermittelte Abhängigkeit des spezifischen elektrischen Widerstandes einer Sandprobe von der Feuchte (schwarz) mit dem mathematischen Modell dieser Beziehung (rote Linie) entsprechend Gleichung (35).

Abbildung 12 zeigt ein experimentelles Ergebnis für die Abhängigkeit des spezifischen elektrischen Widerstandes eines lockeren, pleistozänen Mittelsandes mit einer Porosität von $p = 0.32$ von der Feuchte im Bereich von $F = 0.015$ bis zur weitgehenden Sättigung des Porenraums bei $F = 0.28$ mit einer Porenflüssigkeit, die einen spezifischen elektrischen Widerstand von $11.7 \Omega\text{m}$ besitzt⁸. Der Exponent m beträgt 0.94 anstatt 1.0.

Mit Gleichung (5) kann (35) zu

$$\rho = (p \cdot S)^{-m} \cdot \rho_w \quad (36)$$

umgeformt werden und für den Sonderfall $S=1$, d.h. für Material, dessen Poren vollständig mit Flüssigkeit angefüllt sind, wird daraus die Archie-Gleichung⁹

8 Die Daten wurden durch automatisierte Messung und Speicherung von Widerstand und Probemasse im Abstand von jeweils 10 min während des Austrocknungsprozesses im Verlauf von 72 Stunden mit dem Gerätesystem REVERSAT der Big-M GmbH entsprechend der im 7. Kapitel beschriebenen Methodik ermittelt.

9 G.E. Archie: The electrical resistivity log as an aid in determining some reservoir characteristics. In: Petroleum Transactions of AIME. 146, 1942, S. 54–62.

$$\frac{\varrho}{\varrho_w} = p^{-m} \quad (37)$$

die zur Ermittlung der Porosität von Speichergesteinen und damit zur Vorratsberechnung von Kohlenwassersstoff-Lagerstätten weltweite Anwendung erlangt hat.

Der Exponent m , der für Gesteine in natürlicher Lagerung Werte zwischen 1.3 und 2.0 annehmen kann, wird meist als "Zementationsexponent" bezeichnet, obwohl er nicht in eindeutiger Beziehung zur Zementation der Kornzwischenräume im Sediment steht, aber als Kompaktionsmaß betrachtet werden kann¹⁰.

11. Abhängigkeit des spezifischen elektrischen Widerstandes vom Salzgehalt der Porenflüssigkeit.

Der spezifische elektrische Widerstand ϱ_w der Porenflüssigkeit ist vor allem eine Funktion der Konzentration c der darin gelösten Salze, hängt aber auch von der Temperatur ab.

Er unterscheidet sich für Lösungen verschiedener Salze nur geringfügig und die Salzkonzentration wird deshalb meist für die Summe der gelösten Salze (TDS - Total Dissolved Solids) betrachtet.

Für reines Wasser beträgt der spezifische elektrische Widerstand 183 000 Ωm , für Grundwasser, das als Trinkwasser genutzt werden kann ca. 20 Ωm und für Meerwasser ca. 0.2 Ωm angesetzt werden.

Die Abhängigkeit von der TDS-Konzentration c ist in Abbildung 13 dargestellt. Sie wird im Konzentrationsbereich von 10^{-1} bis 10 000 mg/l recht gut durch die empirische Beziehung

$$\varrho_w = 4381 \cdot c^{-0.98} \quad (36)$$

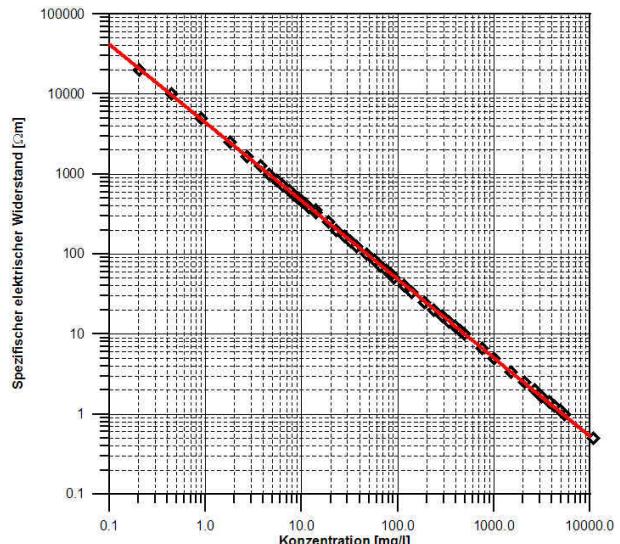


Abbildung 13: Abhängigkeit des spezifischen elektrischen Widerstandes von Salzlösungen von der Konzentration.

beschrieben.¹¹

Die mittlere Abweichung der nach dieser Näherungsgleichung berechneten Werte (rote Punktfolge in Abbildung 13) von den experimentellen Daten (schwarz) beträgt im Bereich von 1 bis 10 000 mg/l nur $\pm 1.5 \Omega\text{m}$.¹²

In der technischen Wasserdiagnostik wird diese Beziehung in der stark vereinfachten Form

$$c [\text{mg/l-TDS}] = 0.5 \cdot 1000 \times \sigma (\text{mS/cm}) \quad (37)$$

genutzt, der nach Gleichung (11) die, zu Gleichung (36) analoge Beziehung

$$\varrho_w = 5000 \cdot c^{-1} \quad (38)$$

entspricht.

10 Peschel, G. und N.T. Dai (1977). Zur Bedeutung des sogenannten Zementationsexponenten. Z. Geol. Wissenschaften, 5, 5, 623-632, Berlin.

11 Abbildung 13 und Gleichung (36) wurden auf der Grundlage von Daten von EXW Foxboro, Massachusetts konstruiert. Sie gelten für eine Temperatur von 25 °C. (<http://mywebb.wit.edu/sandinic/Research/conductivity%20v%20concentration.pdf>).

12 Die häufig verwendete Angabe der Konzentration in mmol/l ist für Flüssigkeiten, in denen mehrere Salze gleichzeitig gelöst sind, sinnlos.

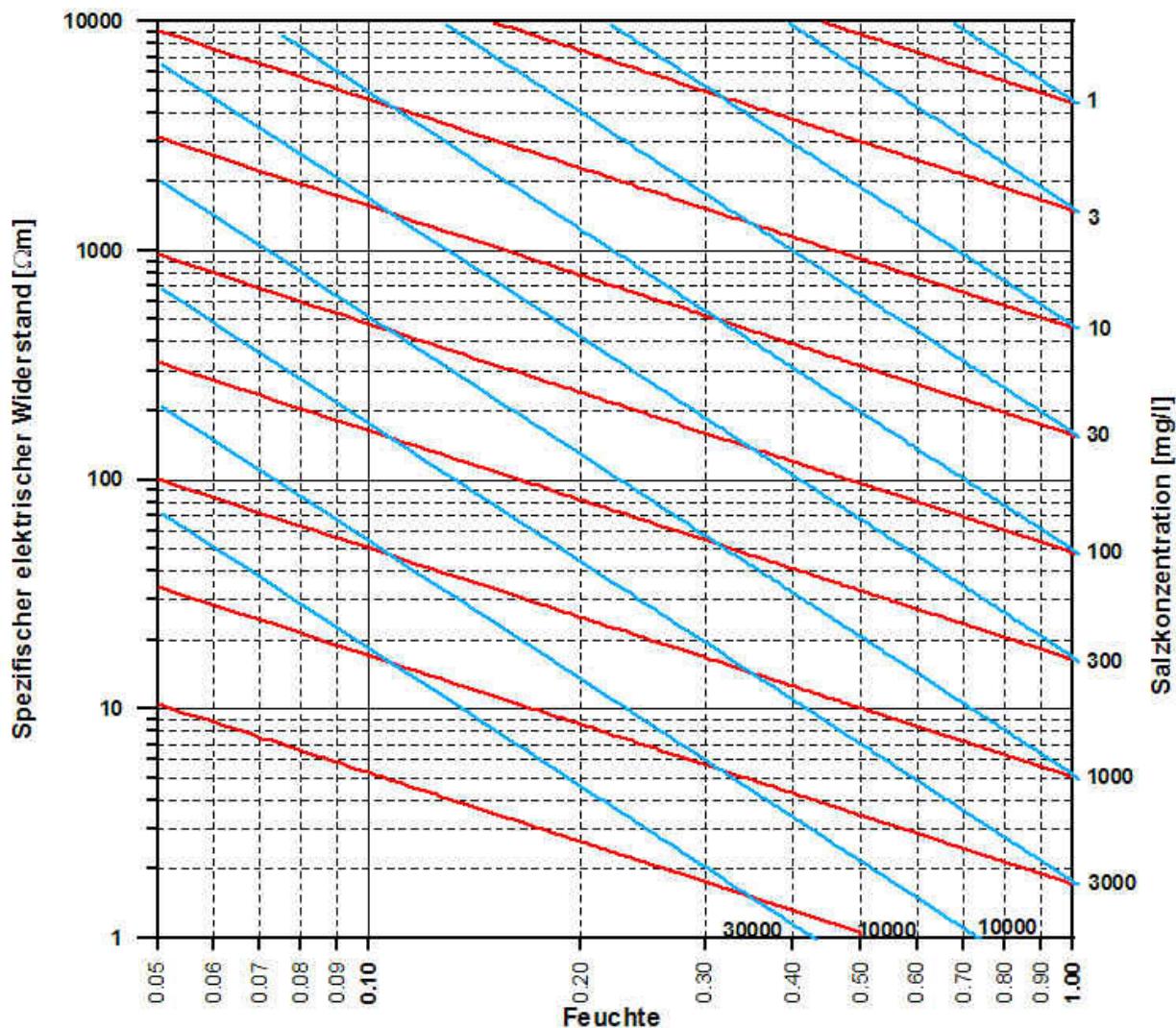


Abbildung 14: Abhängigkeit des spezifischen elektrischen Widerstandes poröser Materialien von der Feuchte und von der Salzkonzentration der Porenflüssigkeit für $m=1$ (rot) und $m=2$ (blau)).

12. Abhängigkeit des spezifischen elektrischen Widerstandes von der Feuchte und vom Salzgehalt der Porenflüssigkeit.

Durch Einsetzen der Gleichung (36) in die Gleichung (34) ergibt sich für die gemeinsame Abhängigkeit des spezifischen elektrischen Widerstandes von der Feuchte und vom Salzgehalt der Porenflüssigkeit

$$\varrho = F^{-m} \cdot 4381 \cdot c^{-0.98} \quad (39).$$

Abbildung 14 veranschaulicht diesen Zusammenhang für $m=1$ (rot) und $m=2$ (blau) mit 15 ausgewählten Konzentrationsstufen in einem doppelt logarithmischen

Koordinatensystem.

Daraus ist erkennbar, daß in dem praktisch beherrschbaren Meßbereich für den spezifischen elektrischen Widerstand zwischen ca. 1 und 10 000 Ω m Feuchtwerte von 5 % bis zur völligen Sättigung des porösen Materials mit Porenflüssigkeiten einer Salzkonzentration von ca. 10 bis 10000 mg/l erfaßt werden können.

Weiterhin folgt aus der graphischen Analyse der Gleichung (39), daß die Sensibilität der Widerstandsmessungen für Feuchteänderungen stark vom Exponenten m abhängig ist. Je komplizierter die Struktur des Porenraums ist, je mehr Blockaden

und Umwege das elektrische Stromfeld behindern, desto größer ist der Unterschied der spezifischen elektrischen Widerstandswerte für eine bestimmte Feuchtedifferenz.

13. Abhängigkeit des spezifischen elektrischen Widerstandes der Porenflüssigkeit von der Temperatur.

Der spezifische elektrische Widerstand der Porenflüssigkeit ist außerdem von der Temperatur abhängig. Die Größenordnung dieser Abhängigkeit für Salzkonzentrationen zwischen 1 und 3000 mg/l im Temperaturbereich von 5 bis 45 °C zeigt Abbildung 15.

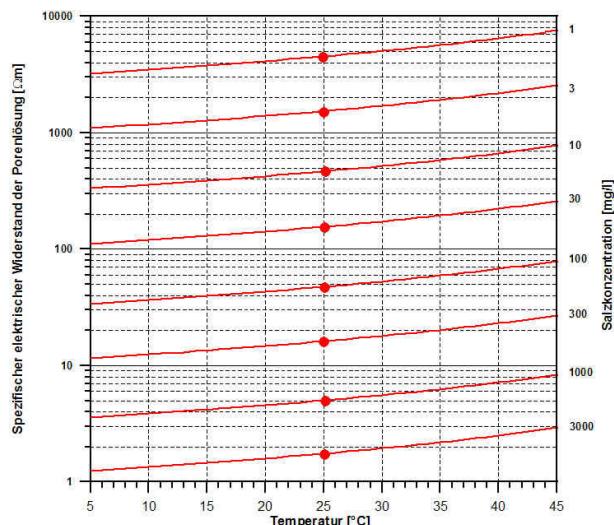


Abbildung 15: Abhängigkeit des spezifischen elektrischen Widerstandes von Porenflüssigkeiten mit Salzkonzentrationen zwischen 1 und 3000 mg/l von der Temperatur.

Diese Abhängigkeit ist nichtlinear und für sensible Anwendungen (z.B. Kontrolle der Trinkwasserqualität) müssen die Meßwerte mit Hilfe einer nichtlinearen Funktion auf den Bezugswert (25 °C) umgerechnet werden.¹³

Für technische Anwendungen genügt meist eine lineare Temperaturkompensation, bei der die Meßwerte $\varrho(T)$ die bei einer Temperatur von T °C ermittelt wurden, nach der Gleichung

$$\varrho_{25} = \varrho(T) \cdot \{1 + \alpha \cdot (25 - T)\} \quad (40)$$

13 Temperaturkompensation "nlF" nach EN 27888.

auf die Bezugstemperatur umgerechnet werden. Für den Temperaturkoeffizienten wird gewöhnlich $\alpha = 0.02$ angesetzt.

Weil der spezifische elektrische Widerstand poröser Materialien fast ausschließlich von dem der darin enthaltenen Porenlösung abhängt, können die betreffenden Werte ebenfalls nach Gleichung (40) behandelt werden. Weil sich diese schon bei Temperaturunterschieden von 5 °C um ca. 10 % verändern, sollte die Temperaturkompensation auf jeden Fall bei Kalibrierungsmessungen durchgeführt werden sowie immer dann, wenn Meßwerte, die bei verschiedenen Temperaturen durchgeführt wurden, miteinander verglichen werden müssen.

14. Wahrer und scheinbarer spezifischer elektrischer Widerstand.

Wenn der spezifische elektrische Widerstand nach Kapitel 8 mit einer der in Kapitel 9 beschriebenen Elektrodenanordnungen an der Oberfläche des porösen Materials gemessen wird, entspricht der ermittelte Wert nur dann dem wahren spezifischen elektrischen Widerstand ϱ_t , wenn das Material im Wirkungsbereich der Elektrodenanordnung homogen ist. Wenn das nicht der Fall ist, dann wird ein scheinbarer spezifischer Widerstand ϱ_a erfaßt¹⁴,

der einem gewichteten Mittelwert der im Wirkungsbereich enthaltenen ϱ_t -Werte, entsprechend ihrem Volumenanteil darstellt.

Die Ursache dafür ist, daß der Verlauf der elektrischen Potentiallinien, deren Abstand die Meßspannung U bestimmt, mit zunehmender Entfernung von der Stromquelle A immer mehr durch periphere ϱ_t -Werte des Material beeinflußt wird. Abbildung 16 veranschaulicht das an einem Beispiel.

14 Die in der Literatur übliche Bezeichnung der Indizes ist von den englischen Wörter "true" und "apparent" abgeleitet.

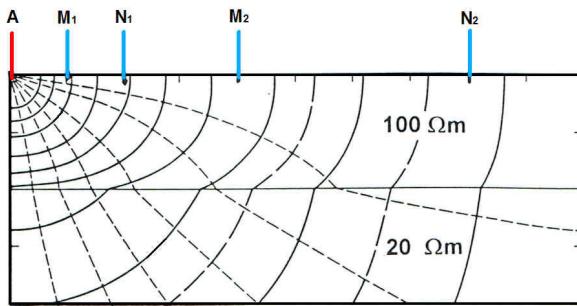


Abbildung 16: Verlauf der elektrischen Potentiallinien an der Oberfläche eines inhomogenen (geschichteten) Untersuchungsobjektes,

Sie zeigt den Verlauf der Potentiallinien, für den Fall, daß unter dem, an der Geländeoberfläche anstehenden trockenen Sand mit einem ϱ_t - Wert von 100 Ωm in einer Tiefe von 1.6 m der Grundwasserspiegel folgt, unter dem der wassergesättigte Sand nur noch einen ϱ_t - Wert von 20 Ωm aufweist. Während die, mit der geringen Wirkungstiefe der Elektroden M1 und N1 gemessene Spannung nach Gleichung (25) noch einen ϱ_a - Wert ergibt, der in der Nähe von 100 Ωm liegt, wird mit der doppelt so großen Wirkungstiefe der Elektrodenanordnung A-M2-N2 ein ϱ_a - Wert gemessen, der bereits viel stärker von den Deformationen der Potentiallinien durch das Grundwasser beeinflußt ist.

Die für diese Fall berechnete Abhängigkeit des scheinbaren spezifischen Widerstandes ϱ_a von der Wirkungstiefe der verwendeten Elektrodenanordnung für das in Abbildung 16 dargestellte Modell zeigt Abbildung 17. Die dort am rechten Rand angegebenen und zu den roten Punkten in der Graphik gehörenden Meßwerte entsprechen denen, die in diesem Fall mit der VRP-Anordnung (s. Kapitel 9.4) gemessen werden. Die daraus rekonstruierte rote Kurve wird als Sondierungskurve bezeichnet.

Wenn in solchen Fällen mit einer zu geringen Wirkungstiefe gemessen wird, erhält man offensichtlich Meßwerte, die fast keine Information über den wahren spezifischen Widerstand ϱ_t der tieferen Schicht

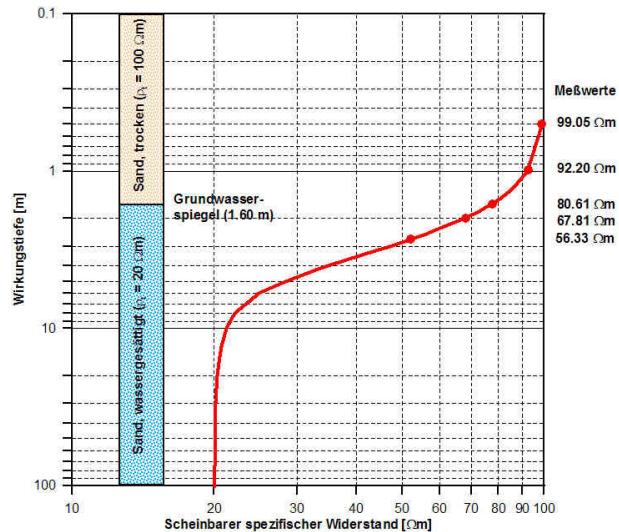


Abbildung 17: Abhängigkeit des scheinbaren spezifischen Widerstandes von der Wirkungstiefe der Elektrodenanordnung für das, in Abbildung 16 dargestellte Modell.

und damit keine Information über deren Feuchte enthalten.

Die Ermittlung von ϱ_t aus mehreren Werten von ϱ_a , die mit verschiedenen Wirkungstiefen gemessen wurden, hat wegen der potentialtheoretischen Äquivalenz der Modelle keine eindeutige Lösung. Diese "inkorrekt gestellte Aufgabe" kann nur mit Näherungsverfahren bearbeitet werden. Dazu sind sehr komplizierte und umfangreiche Rechenoperationen erforderlich, die effektiv nur mit spezieller Software durchgeführt werden können¹⁵.

Andererseits kann man mit Hilfe von Widerstandsmessungen, die mit verschiedenen Wirkungstiefen erfolgen, aber auch erkennen, ob ein Untersuchungsobjekt hinsichtlich des spezifischen elektrischen Widerstandes homogen ist. In diesem Fall erscheint die Sondierungskurve im Diagramm der Abbildung 17 als annähernd gerade, parallel zur vertikalen Achse verlaufende Linie und die Meßwerte können direkt als ϱ_t - Werte betrachtet werden.

15 Z.B. die Programmsysteme IMPIPS1 und IMPIPS3 der Big-M GmbH.

15. Ermittlung des Exponenten m und der Salzkonzentration der Porenflüssigkeit des porösen Materials.

Die vorstehenden Überlegungen haben aufgezeigt, daß der spezifische elektrische Widerstand nicht nur von der Feuchte, sondern von einer Reihe weiterer Kennziffern der porösen Materialien abhängt. Widerstandsmessungen sind deshalb zunächst nur als Relativbestimmungen der Feuchte geeignet, mit denen die räumliche Feuchteverteilung auch auf und in größeren Untersuchungsobjekten effektiv erfaßt werden kann. Bereits dafür muß zumindest eine Temperaturkorrektur mit Gleichung (40) durchgeführt werden, damit keine "Scheinanomalien" der räumlichen Widerstandsverteilung auftreten. Für erste Übersichtsuntersuchungen genügt danach meist bereits die Betrachtung der scheinbaren spezifischen elektrischen Widerstände.

Wenn die Feuchte als Zielgröße aus den Meßwerten des spezifischen elektrischen Widerstandes bestimmt werden soll, muß zunächst eine Transformation der gemessenen scheinbaren spezifischen Widerstände ϱ_a in wahre spezifische Widerstände ϱ_t erfolgen.

Danach muß eine Kalibrierung vorgenommen werden, für die mindestens für zwei Orte des Untersuchungsobjektes, an denen deutliche Widerstandsunterschiede gemessen wurden, direkte Bestimmungen der Feuchte (z.B. gravimetrisch an Kernbohrproben) durchgeführt werden. Danach stehen zwei Datenpaare zur Verfügung, nämlich ϱ_1 und F_1 sowie ϱ_2 und F_2 (sog. Zweipunktkalibrierung).

Mit diesen Daten kann man dann die Salzkonzentration der Porenlösung c und den Exponenten m wie folgt ermitteln:

Zur Vereinfachung wird zunächst die Substitution

$$4381 \cdot c^{-0,98} = A \quad (41)$$

vorgenommen. Damit kann Gleichung (39) vereinfacht werden zu

$$\varrho = F^{-m} \cdot A \quad (42).$$

Nach Einsetzen der Kalibrierungsdaten erhält man das Gleichungssystem

$$\varrho_1 = F_1^{-m} \cdot A \quad (43a) \text{ und}$$

$$\varrho_2 = F_2^{-m} \cdot A \quad (43b).$$

Nach Auflösung beider Gleichungen nach A und Subtraktion der Gleichung (43b) von (43a) bleibt

$$(F_1^m \cdot \varrho_1) = (F_2^m \cdot \varrho_2) \quad (44).$$

Danach werden beide Seiten logarithmiert und nach Auflösung nach m ergibt sich für den Exponenten

$$m = \frac{\ln(\varrho_2) - \ln(\varrho_1)}{\ln(F_1) - \ln(F_2)} \quad (45)^{16}.$$

Für die Ermittlung der Salzkonzentration wird Gleichung (43a) zunächst wieder nach A aufgelöst.

$$A = \varrho_1 \cdot F_1^m \quad (46)$$

Dann wird (46) auf der rechten Seite von Gleichung (41) eingesetzt und das Ergebnis nach c aufgelöst. Es ergibt sich der Ausdruck

$$c = \exp \left[\frac{1}{0.98} \cdot \ln \left(\frac{4381}{\varrho_1 \cdot F_1^m} \right) \right] \quad (47)$$

für die Berechnung der Salzkonzentration der Porenlösung in mg/l.

Mit dem zweiten Datenpaar, ϱ_2 und F_2 kann eine Kontrollrechnung vorgenommen werden, die eine Beurteilung der Zuver-

16 Welche Logarithmenbasis verwendet wird, ist wegen

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

gleichgültig. Hier und bei den folgenden Überlegungen werden natürliche Logarithmen bevorzugt.

lässigkeit des ermittelten c-Wertes ermöglicht. Zum Ausgleich von zufälligen Meßfehlern kann für weitere Berechnungen der Mittelwert aus beiden c-Werten verwendet werden.

Zur Veranschaulichung wurden aus den Daten des in Abbildung 12 gezeigten Beispiels die Werte $F_1 = 0.2$ und $\varrho_1 = 46 \Omega\text{m}$ sowie $F_2 = 0.018$ und $\varrho_2 = 522 \Omega\text{m}$ ausgewählt. Mit Gleichung (45) erhält man dann $m = 1.01$ und mit Gleichung (46) bzw. dem analogen Ausdruck für das zweite Datenpaar einen Mittelwert für $A = \varrho_w = 9.07$ und daraus eine Salzkonzentration der Porenlösung von $c = 548 \text{ mg/l}$.

Falls mehr als zwei Meßwertepaare der Kalibrierungsmessung vorliegen, können der Exponent m und die Salzkonzentration, meist genauer als es die aufgezeigte analytische Lösung ermöglicht, in folgender Weise durch statistische Ausgleichsrechnung bestimmt werden.

Wenn man beide Seiten der Gleichung (42) logarithmiert, erhält man

$$\ln(\varrho) = -m \cdot \ln(F) + \ln(A) \quad (48).$$

Das ist offensichtlich die Gleichung einer geraden Linie im doppelt logarithmisch geteilten Koordinatensystem (Abbildung 14). Darin entspricht m dem Anstieg der Geraden, wie auch aus Gleichung (45) unmittelbar erkennbar ist.

Aus Gleichung (42) folgt weiter für den virtuellen Fall, daß das zu untersuchende Volumen nur noch aus Flüssigkeit besteht, d.h. für $F = 1$ und damit für $\ln(F) = 0$, daß $\ln(A) = \ln(\varrho_w)$ gilt und damit $A = \varrho_w$. Folglich kann aus dem konstanten Glied der Gleichung (48), bei dem die Gerade die Linie $F=1$ schneidet, die Salzkonzentration der Porenlösung direkt mit Gleichung (49) berechnet werden, indem dort

$$\varrho_w = \exp\{\ln(A)\}$$

eingesetzt wird.

Die praktische Durchführung erfordert die Bestimmung der Parameter m und A der nichtlinearen Regressionsfunktion (48) nach der Methode der kleinsten Quadrate mit geeigneter Software ¹⁷.

Für die in Abbildung 12 dargestellte Sandprobe, für die als Ergebnis eines Trocknungsexperimentes 1031 Datenpaare der aktuellen Feuchte und des dazugehörigen spezifischen elektrischen Widerstandes mit einem Datenlogger registriert wurden, ergab sich die Regressionsfunktion

$$\ln(\varrho_w) = -0.94 * \ln(F) + 2.45 \quad (49),$$

bzw. in Form der Gleichung (42) geschrieben

$$\varrho_w = 11.64 \cdot F^{-0.94} \quad (50)$$

mit einem Korrelationskoeffizienten von 0.993, wonach von einer signifikanten Beziehung zwischen den ermittelten experimentellen Daten ausgegangen werden kann. Der Exponent der untersuchten Sandprobe beträgt demnach $m = 0.94$. Aus dem absoluten Glied in (49) von 2.45 folgt als $A = \exp(2.45)$ ein spezifischer elektrischer Widerstand der Porenflüssigkeit von $\varrho_w = 11.64 \Omega\text{m}$, aus dem eine Salzkonzentration von 425 mg/l resultiert.

Abbildung 18 veranschaulicht die durch Zweipunktkalibrierung (blau) und durch statistische Ausgleichsrechnung (rot) an die empirischen Beispieldaten angepaßten Näherungsgleichungen. Der mittlere absolute Fehler der nach diesen Gleichungen berechneten Werte des spezifischen elektrischen Widerstandes im Vergleich zu den Meßwerten beträgt für die Zweipunktkalibrierung $\pm 28.5 \Omega\text{m}$ (15.0 %) und für die Regressionsgleichung $\pm 24.2 \Omega\text{m}$ (11.8 %). Er ist hauptsächlich auf die Abweichungen im Feuchtebereich zwischen 0.06 und 0.15 zurückzuführen, die wahr-

¹⁷ Gut geeignet ist z.B. "GRAPHER" von Golden Software LLC, 809 14th Street, Golden, Colorado 80401 USA <http://www.goldensoftware.com/products/grapher> weil die Ermittlung der Parameter unmittelbar im Zusammenhang mit der Veranschaulichung der Meßwerte im doppel logarithmischen Koordinatensystem erfolgen kann.

scheinlich durch eine Änderung des Stromleitungsmechanismus während der Austrocknung verursacht wurde.

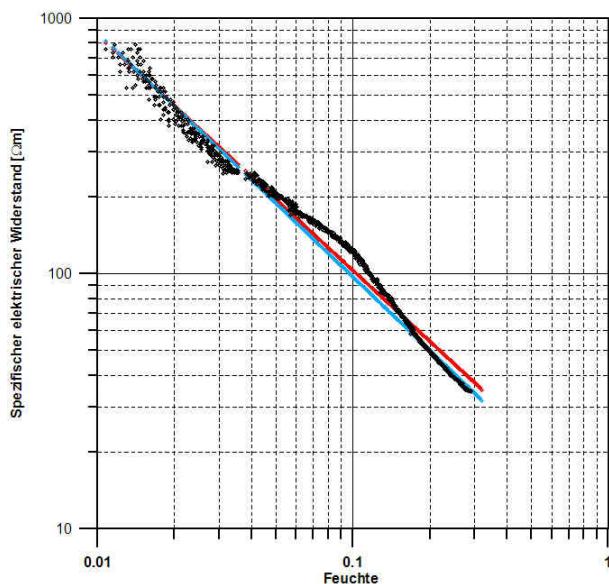


Abbildung 18: Vergleich der durch Zweipunktkalibrierung (blau) und statistische Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate (rot) an die Beispieldaten der Abbildung 12 angepaßten Funktionen in der Form (42) bzw. (48).

16. Berechnung der Feuchte aus dem spezifischen elektrischen Widerstand.

Wenn nur eine Zweipunktkalibrierung durchgeführt wurde, kann die Auswertungsfunktion zur Berechnung der Feuchte aus dem spezifischen elektrischen Widerstand direkt durch analytische Umstellung der Gleichung (39) bzw. (42) nach F vorgenommen werden, wodurch sich Gleichung

$$F = \exp\left\{\frac{1}{m} \cdot \ln\left(\frac{A}{\varrho}\right)\right\} \quad (51)$$

ergibt.

Für das in Abbildung 12 dargestellte Meßbeispiel erhält man dann die Auswertungsfunktion

$$F = \exp\left\{\frac{1}{1.01} \cdot \ln\left(\frac{9.07}{\varrho}\right)\right\} \quad (52)$$

Wenn die Kalibrierung auf der Grundlage von mehr als zwei Proben durchgeführt werden soll, ist das Gleichungssystem (43a) und (43b) überbestimmt und es

empfiehlt sich dann, die statistische Ermittlung der Parameter m und A so vorzunehmen, daß die, an die Meßwerte anzupassende Regressionsfunktion von Anfang an der gesuchten Zielfunktion zur Berechnung von F entspricht.

Durch entsprechende Umformung von Gleichung (48) ergibt sich dafür zunächst

$$\ln(F) = \frac{1}{m} \cdot \ln(A) - \frac{1}{m} \cdot \ln(\varrho) \quad (53)$$

oder

$$\ln(F) = -\frac{1}{m} \cdot \ln(\varrho) + B \quad (54)$$

Das ist ebenfalls die Gleichung einer geraden Linie im doppelt logarithmischen Koordinatensystem. Der Anstieg dieser Geraden entspricht dem Kehrwert des Exponenten m. Aus dem konstanten Glied B kann der spezifische elektrische Widerstand der Porenflüssigkeit mit

$$\varrho_w = A = \exp\{m \cdot B\} \quad (55)$$

berechnet werden und daraus die Salzkonzentration c der Porenflüssigkeit.

Wenn die Parameter 1/m und B aus den Meßwerten vom ϱ und F durch statistische Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt sind, kann nach Berechnung von A mit (55) alternativ zu (53) und (54) auch die Gleichung (51) für die Berechnung weiterer Feuchtwerte aus Meßwerten des spezifischen elektrischen Widerstandes genutzt werden.

Für die Daten des hier betrachteten Beispiels (Abbildung 12) ergab die Berechnung der Feuchtwerte aus den Meßwerten des spezifischen elektrischen Widerstandes mit den Parametern der Zweipunktkalibrierung nach Gleichung (52) die in Abbildung 19 blau dargestellte Linie. Der mittlere absolute Fehler beträgt ± 0.053 (15.8 %).

Die Regressionfunktion hat die Form

$$\ln(F) = -1.050 * \ln(\varrho) + 2.5477 \quad (56)$$

woraus $m = 0.95$ und $A = \varrho_w = 11.31$ sowie $c = 339 \text{ mg/l}$ resultieren.

Die damit nach Gleichung (51) berechneten Feuchtwerte wurden in Abbildung 19 den Meßwerten (Schwarz) als rote Punktfolge gegenübergestellt.

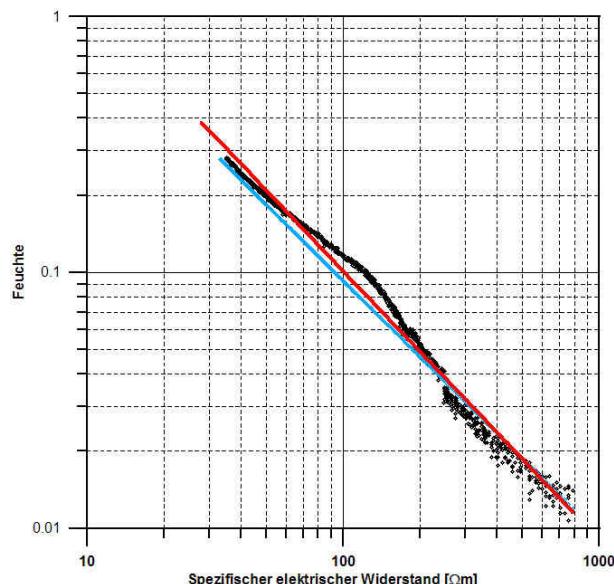


Abbildung 19: Vergleich der durch Zweipunktkalibrierung (blau) und statistische Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate (rot) an die Beispieldaten der Abbildung 12 angepaßten Funktionen in der Form (52) bzw. (56).

Der absolute mittlere Fehler der auf diese Weise ermittelten Feuchtwerte beträgt ± 0.045 (12.3 %).

Demnach kann die Feuchte im hier betrachteten Beispiel aus den Meßwerten des spezifischen elektrischen Widerstandes mit einem mittleren Fehler von ca. 0.05 ermittelt werden, gleichgültig ob die Kalibrierung mit zwei oder mit über 1000 Meßwertepaaren erfolgte.

Wenn an den, für die Kalibrierung verwendeten Materialproben zugleich auch die Porosität ermittelt wurde, dann kann man den ermittelten Zusammenhang zwischen der Feuchte und dem spezifischen elektrischen Widerstand mit Gleichung (5) leicht in die Abhängigkeit der Feuchte vom Sättigunggrad umrechnen. Das setzt aller-

dings voraus, daß das Untersuchungsobjekt hinsichtlich seiner Porosität homogen ist. Kleinere Porositätsunterschiede zwischen den untersuchten Proben können durch Mittelwertbildung vereinheitlicht werden.

Eine solche Normierung der Feuchte auf die Porosität hat den Vorteil, daß die Ergebnisse von geoelektrischen Feuchtebestimmungen an Objekten mit unterschiedlicher Porosität besser miteinander verglichen werden können.

17. Präzisierung der Berechnung der Materialfeuchte nach Kalibrierung durch Labormessungen-

Die oben erwähnte Abweichung der Meßwerte von den ermittelten Zielfunktionen zur Berechnung der Feuchte aus den Meßwerten des spezifischen elektrischen Widerstandes im Materialfeuchtebereich zwischen 0.06 und 0.15 kann bei einer Zweipunktkalibrierung nicht weiter untersucht werden.

Wenn jedoch der spezifische elektrische Widerstand von Materialproben zusammen mit der Feuchte von der vollständigen Sättigung des Porenraums bis zur vollständigen Austrocknung mit der in Fußnote 8 erwähnten Untersuchungsmethodik untersucht wurde und dabei eine dichte Folge von Meßwertepaaren gewonnen wurde, kann eine detailliertere mathematische Modellierung des Zusammenhangs beider Größen vorgenommen werden.

Dazu wird zunächst die Regressionsfunktion der Form (53) bzw. (54) für den Widerstandsbereich zwischen dem gemessenen Minimum des spezifischen elektrischen Widerstandes und dem erkennbaren Kurvenknick in Abbildung 19 mit den Parametern m_1 und B_1 ermittelt. Anschließend bestimmt man die Parameter m_2 und B_2 der Regressionsfunktion für den Bereich zwischen dem Kurvenknick und dem

gemessenen Maximum des spezifischen elektrischen Widerstandes.

Abbildung 20 zeigt das Ergebnis dieser Berechnungen für das hier betrachtete Beispiel mit dem Kurvenknick bei $120 \Omega\text{m}$. Als Parameter der Gleichung (54) wurden dabei $1/m_1 = -0.813$ und $B_1 = 1,58$ für den niederohmigen Kurvenabschnitt (rot) sowie $1/m_2 = -1.22$ und $B_2 = 3,51$ für den hochohmigen Kurvenabschnitt (blau) ermittelt.

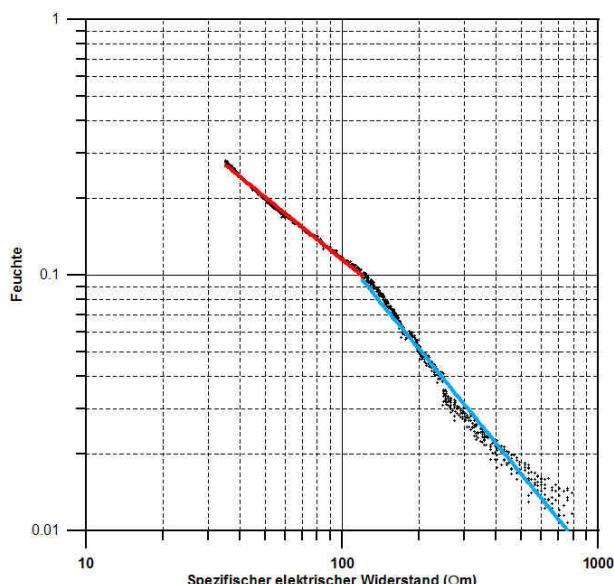


Abbildung 20: Verbesserung der Berechnungsgenauigkeit der Materialfeuchtwerte durch die separate Anpassung von Regressionsfunktionen an den niederohmigen (rot) und den hochohmigen Bereich (blau) der empirisch ermittelten Abhängigkeit vom spezifischen elektrischen Widerstand.

Mit den daraus umgerechneten Werten von $m_1 = -1.23$ und $A_1 = 7.00$ können die Werte der Materialfeuchte aus den Meßwerten des spezifischen elektrischen Widerstandes im niederohmigen Bereich nach Gleichung (51) mit einem mittleren absoluten Fehler von nur ± 0.018 (0,4 %) berechnet werden.

Im hochohmigen Bereich, in dem die umgerechneten Parameter $m_2 = 0.82$ und $A_2 = 17.64$ gelten, beträgt der mittlere absolute Fehler der berechneten Feuchtwerte ± 0.07 (0,3 %).

Demnach ist auf diese Weise eine erhebliche Verbesserung der Genauigkeit der Feuchtebestimmung aus geoelektrischen Widerstandsmessungen möglich.

Dieser charakteristische Kurvenverlauf mit zwei Abschnitten deutlich unterschiedlicher Neigung im doppelt logarithmischen Koordinatensystem wurde bei ganz verschiedenen porösen Materialien beobachtet und ist wahrscheinlich auf eine Veränderung des elektrischen Leitungsmechanismus bei fortschreitender Austrocknung zurückzuführen.

Ein naheliegender Zusammenhang mit der Zunahme der Salzkonzentration der Porenlösung bei fortschreitender Austrocknung besteht offenbar nicht. Bei diesem, kontinuierlich verlaufenden Prozeß müßte die Kurve eine stetige Krümmung aufweisen. Außerdem folgt aus den ermittelten A-Werten, die dem spezifischen elektrischen Widerstand der Porenflüssigkeit entsprechen, für den hochohmigen Kurvenabschnitt eine erheblich geringere Salzkonzentration ($c_2 = 278 \text{ mg/l}$) als für den niederohmigen Kurvenabschnitt ($c_1 = 713 \text{ mg/l}$).

Wahrscheinlich wirkt sich die Ausscheidung von Salz aus der Porenlösung, die erst bei einer Konzentration von $c = 26300 \text{ mg/l}$ beginnt, nur ganz lokal, ohne Einfluß auf die restliche Porenflüssigkeit aus.

Der höhere A-Wert im hochohmigen Bereich hängt offensichtlich nicht mehr mit der Salzkonzentration der Porenflüssigkeit zusammen sondern beginnend mit dem Kurvenknick verringert sich bei zunehmender Austrocknung der Leiterquerschnitt des Porenraums, so daß die zu Grunde gelegte Gleichung (34) ihre Gültigkeit verliert. Als elektrischer Leiter tritt dann nur noch die an die Porenwände hygroskopisch gebundene Flüssigkeit auf.

Unabhängig von dieser Interpretationsfrage kann die Gleichung (51) auch im hoch-

ohmigen Bereich zur Berechnung der Feuchtwerte aus den Meßwerten des spezifischen elektrischen Widerstandes mit den empirisch ermittelten Parametern m_2 und A_2 verwendet werden.

Formal betrachtet genügt für eine auf diese Weise vorgenommene Kalibrierung bereits eine einzige Probe, vorausgesetzt daß das Untersuchungsobjekt homogen ist.